МАНАТ АЛУА МАНАТҚЫЗЫ

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по образовательной программе 8D05401 - Математика

Актуальность темы. В диссертационной работе исследованы нелокальные краевые задачи для линейных и нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка.

Теоретическое изучение краевых задач с нелокальными условиями для псевдопараболических уравнений получило развитие в связи с их применением при решении сложных задач науки и техники. Одними из первых результатов по решению краевых задач с нелокальными условиями для псевдопараболических уравнений являются работы А.Ф. Чудновского, J.R. Cannon и Л.А. Камынина. Существенный вклад в дальнейшее развитие данного направления внесли А.М. Нахушев, В.А. Водахова, А.И. Кожанов, В.З. Канчукоев, Л.С. Пулькина, В.И. Жегалов, Е.А. Уткина, Н.С. Попов, Б.С. Аблабеков, К.Г. Кожобеков, Cao Yin J., Jin Ch., Н.К. Аркабаев, А.С. Сопуев, У.Д. Молдояров, Х.Г. Умаров и другие ученые.

В последние годы активно исследуются различные аналитические и приближённые методы решения псевдопараболических уравнений. Актуальность данных уравнений непосредственно связана с их широким применением при математическом моделировании физических, технических и инженерных процессов. Псевдопараболические уравнения эффективно используются для описания прикладных задач, таких как теплообмен в сложных средах, фильтрационные процессы, динамика деформируемых тел, а также модели биологического размножения или миграции. Таким образом, разработка и совершенствование эффективных аналитических и приближенных методов решения таких уравнений имеет важное значение не только с теоретической точки зрения, но и для практических приложений.

В работе рассмотрены краевые задачи с нелокальными условиями для уравнений Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса (ББМБ) и Бенджамина–Бона–Махони (ББМ). Несмотря на наличие большого количества исследований, посвященных данным уравнениям, интерес к ним до настоящего времени не ослабевает. Это обусловлено тем, что уравнение Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса способно описывать широкий класс реальных физических процессов: оно используется как модель распространения волн в несжимаемых жидкостях, учитывающая одновременное проявление дисперсионных и диссипативных эффектов, а также влияние нелинейности. Кроме того, одновременное присутствие в уравнении диссипативных и дисперсионных членов делает его весьма сложным объектом как с математической точки зрения, так и с точки зрения

численных методов. В связи с этим необходимость построения эффективных приближенных методов решения прикладных задач способствует возрастанию научного интереса к данному уравнению.

Цель работы. Получение условий разрешимости нелокальных краевых задач для линейных и нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка со смешанными производными, а также разработка конструктивных алгоритмов нахождения их решений.

Задачи исследования:

- построение алгоритма нахождения решения нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка со смешанными производными и получение условий его сходимости в терминах исходных данных.
- исследование единственности решения нелокальной краевой задачи для одного класса линейных псевдопараболических уравнений.
- на основе алгоритма нахождения решения нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка получение условий существования «изолированного» решения нелокальной краевой задачи для нелинейного псевдопараболического уравнения.
- применение предложенного алгоритма к нелинейным уравнениям Бенджамина–Бона–Махони и Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса и получение необходимых условий существования решения.

Методы исследования. В исследовательской работе использовались методы функционального анализа и методы параметризации.

Научная новизна. Для линейных и нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка с нелокальными краевыми условиями были исследованы соответствующие краевые задачи и получены следующие результаты:

1. Построен алгоритм решения нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка и получены условия его сходимости.
2. Исследована единственность решения нелокальной краевой задачи для одного класса линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка.
3. На основе алгоритма решения нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка получены условия существования «изолированного» решения нелокальной краевой задачи для нелинейного псевдопараболического уравнения третьего порядка.
4. Предложенный алгоритм применён к нелинейным уравнениям Бенджамина–Бона–Махони и Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса, для которых получены условия сходимости решений.

Теоретическая и практическая значимость полученных результатов. Полученные в ходе работы результаты носят теоретический характер и могут быть использованы при построении алгоритмов решения нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными третьего порядка, а также при преподавании специальных курсов по математике в высших учебных заведениях.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Алгоритм решения нелокальной краевой задачи для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка и условия его сходимости.
2. Единственность решения нелокальной краевой задачи для одного класса линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка.
3. Условия существования «изолированного» решения нелокальной краевой задачи для нелинейного псевдопараболического уравнения третьего порядка, полученные на основе алгоритма решения соответствующей линейной задачи.
4. Применение предложенного алгоритма к нелинейным уравнениям Бенджамина–Бона–Махони и Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса и условия сходимости их решений.

Достоверность и обоснованность проведённых исследований. Конструктивный характер применённых в работе методов обеспечивает достоверность и обоснованность полученных результатов. Общие выводы сформулированы в виде теорем и снабжены их доказательствами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная научно-практическая конференция «Тенденция развития современной математики и ее преподавания в условиях цифровизации образования» (27-28 апреля 2023 г., Университет дружбы народов им. академика А. Куатбекова, г. Шымкент, Республика Казахстан);
- Традиционная международная апрельская математическая конференция (5-7 апреля 2023г., ИМММ МНВО РК, г. Алматы, Республика Казахстан);
- Международная научно-практическая конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения члена-корреспондента АН КазССР, доктора физико-математических наук, профессора Тулеубай Идрисовича Аманова (22-23 июня 2023 г., г. Астана, Республика Казахстан);
- VII Всемирный Конгресс математиков тюркского мира (20-23 сентября 2023 г., г. Туркестан, Республика Казахстан);
- Традиционная международная апрельская математическая конференция (16-19 апреля 2024 г., ИМММ МНВО РК, г. Алматы, Республика Казахстан);
- «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» международная научная конференция посвященная 90 летию со дня рождения академика Т.Д. Джураева (24-26 октября 2024 г., г. Ташкент, Республика Узбекистан);
- «Actual problems of applied mathematics and information technologies – Al-Khwarizmi 2024» международная научная конференция, (22-23 октября 2024 г., Национальный Университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Республика Узбекистан);
- «Evolution Equations, Approximation and Spectral Optimization» международная летняя школа и конференция (11-18 сентября 2024 г., ИМММ МНВО РК, г. Алматы, Республика Казахстан);
- Международная научная конференция «Актуальные вопросы

междисциплинарных научных исследований», приуроченная к 100-летию академика Е.А. Букетова» (17-20 июня 2025 г., г. Караганда, Республика Казахстан).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 научных статьях и материалах конференций, в том числе: 2 статьи – в изданиях, входящих в базу Scopus (процентиль 53), 1 статья – в издании, входящем в базу Web of Science (SCIE, Q2), 1 статья – в издании, рекомендованном уполномоченным органом.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объёмом 92 страниц состоит из следующих структурных элементов: введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы.

В первой главе исследуется нелокальная краевая задача с нелокальными условиями для линейного псевдопараболического уравнения третьего порядка. Путём введения новой переменной понижается порядок исходного уравнения, после чего проводится разбиение временного интервала и получается система уравнений относительно искомых функций. Для данной системы уравнений строится алгоритм нахождения соответствующего решения. Доказана сходимость алгоритма, а также получены оценки между точным и приближённым решениями.

Во второй главе в качестве обобщения линейного уравнения, рассмотренного в первой главе, исследуется нелинейная краевая задача с нелокальными условиями. Отличие данной главы от первой заключается в использовании иных интегральных неравенств при доказательствах, а также в построении областей, в которых обеспечивается существование и единственность решения.

В третьей главе с использованием построенного алгоритма получены решения уравнений Бенджамина–Бона–Махони и Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса, обладающих существенной прикладной значимостью и описывающих применение нелинейных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Уравнения Бенджамина–Бона–Махони и Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса широко применяются в физике и прикладной математике для описания волновых процессов. Уравнение Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса находит применение в гидродинамике, физике плазмы, теории упругости и инженерных задачах. Таким образом, уравнение Бенджамина–Бона–Махони в большей степени ориентировано на теоретические исследования, тогда как уравнение Бенджамина–Бона–Махони–Бюргерса эффективно используется для моделирования практических и реальных процессов.

Связь работы с другими научно-исследовательскими работами.

Диссертационная работа выполнена в рамках проекта, финансируемого из государственного бюджета:

AP09259780 «Краевые задачи для псевдопараболических уравнений и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения Вольтерра».

Тема диссертационного исследования по направлению «Естественные науки» соответствует приоритетному направлению «Интеллектуальный

потенциал страны», специализированному научному направлению фундаментальные и прикладные исследования в области математики, механики, астрономии, физики, химии, биологии, информатики и географии.

Вклад докторанта в подготовку каждой публикации. Во всех опубликованных работах докторант принимал непосредственное участие в их подготовке. В 13 работах, написанных в соавторстве с научными руководителями и соавторами, научными руководителями была сформулирована постановка задачи и выбран метод исследования, тогда как докторант самостоятельно сформулировал основные и вспомогательные результаты, а также выполнил их доказательство.

Количество использованных источников – 105.

Ключевые слова. Нелокальные краевые задачи, псевдопараболическое уравнение третьего порядка, метод параметризации, условия существования решения, алгоритм, приближённое решение.